PROPIEDADES DE LOS DETERMINANTES

	Propiedad	Ejemplo
1	El determinante de una matriz y de su traspuesta es el mismo. $\lvert A \rvert = \lvert A^t \rvert$	$A = \begin{pmatrix} 7 & -4 & 8 \\ 11 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 17 \end{pmatrix} \quad A^t = \begin{pmatrix} 7 & 11 & 1 \\ -4 & 2 & 0 \\ 8 & 0 & 17 \end{pmatrix}$ $\left. \begin{array}{l} \lvert A \rvert = 970 \\ \lvert A^t \rvert = 970 \end{array} \right\} \Rightarrow \lvert A \rvert = \lvert A^t \rvert = 970$
2	El determinante del producto de dos matrices cuadradas A y B es igual al producto de los determinantes de A y de B- Si A y B son dos matrices cuadradas del mismo orden. **$\lvert A \cdot B \rvert = \lvert A \rvert \cdot \lvert B \rvert$**	$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad \lvert A \rvert = -2 \qquad B = \begin{pmatrix} 9 & 6 \\ 7 & 10 \end{pmatrix} \quad \lvert B \rvert = 48$ $A \cdot B = \begin{pmatrix} 23 & 26 \\ 55 & 58 \end{pmatrix} \quad \lvert A \cdot B \rvert = -96 = (-2) \cdot 48 = \lvert A \rvert \, \lvert B \rvert$
3	Si **multiplicamos** a una línea (es decir, una fila o una columna) por un número **k**, el determinante queda multiplicado por dicho número: **$k \cdot \lvert A \rvert$**	$\lvert A \rvert = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -12 \Rightarrow \begin{vmatrix} 2 \cdot 1 & 2 & 3 \\ 2 \cdot 5 & 4 & 3 \\ 2 \cdot 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -24 = 2\,(-12) = 2 \lvert A \rvert$ $k = 2$

4	Si A es una matriz de orden n y k es un número real: **$\lvert k \cdot A \rvert = k^n \lvert A \rvert$**	$\lvert A \rvert = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -12 \Rightarrow \begin{vmatrix} 2\cdot 1 & 2\cdot 2 & 2\cdot 3 \\ 2\cdot 5 & 2\cdot 4 & 2\cdot 3 \\ 2\cdot 2 & 2\cdot 1 & 2\cdot 2 \end{vmatrix} = -96 = 2^3(-12) = 2^3 \lvert A \rvert$ $k = 2$
5	Si se **intercambian dos líneas** de un determinante entonces **cambia su signo.**	$\lvert A \rvert = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 3 \qquad \lvert B \rvert = \begin{vmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -3$
6	Si en un determinante los elementos de **una línea son sumas de dos sumandos**, se puede descomponer en **suma de dos determinantes**.	$\begin{vmatrix} 1+1 & 2 & 3 \\ 5+2 & 4 & 3 \\ 2+3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}$ $-27 = -12 + (-15)$
7	Si una matriz tiene una **línea nula** su determinante vale **cero.**	$\lvert A \rvert = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \qquad \lvert B \rvert = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0$
8	Si una matriz tiene **dos líneas proporcionales o iguales** entonces su determinante vale **cero.**	$\lvert A \rvert = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \qquad \lvert B \rvert = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0$ $F_1 = 2 \cdot F_3 \qquad F_1 = F_3$

9	Si **una línea** puede expresarse como **combinación lineal** de otras líneas su determinante vale **cero**. Como consecuencia, todas las líneas de una matriz son **linealmente independientes** si su determinante es distinto de cero.	$\lvert A \rvert = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2\cdot 2-1 & 2\cdot 3-2 & 2\cdot 1-1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0$ $F_1 = 2 \cdot F_2 - F_3$
10	Si a una línea se suma una **combinación lineal** de otras líneas paralelas su determinante no varía Es decir que se **le suma otra línea multiplicada por un número real**, su determinante no varía	$\lvert A \rvert = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2\cdot 3+1 & 2\cdot 2+2 & 2\cdot 1+3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -12$ $F_1 = F_1 + 2 \cdot F_2$

Determinantes de algunas matrices especiales	
Si A es una **matriz diagonal**, su determinante es el producto de los elementos de su diagonal principal.	$\lvert A\rvert = \begin{vmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 4\cdot 1\cdot 5 = 20$
Si A es una **matriz triangular inferior** su determinante es el producto de los elementos de su diagonal principal.	$\lvert D\rvert = \begin{vmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 5\cdot 2\cdot 1 = 10$
Si A es una **matriz triangular superior** su determinante es el producto de los elementos de su diagonal principal.	$\lvert B\rvert = \begin{vmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 4\cdot 2\cdot 1 = 8$

No cumple	
El determinante de la **suma de dos matrices cuadradas** A y B no siempre es igual a la **suma de los determinantes** de A y de B **$\|A+B\| \neq \|A\| + \|B\|$**	$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -8 & 9 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$ $\left.\begin{array}{l} \|A+B\| = -\ 173 \\ \|A\| + \|B\| = -\ 64 \end{array}\right\} \Rightarrow \|A+B\| \neq \|A\| + \|B\|$