PROPIEDADES DE LOS DETERMINANTES
Ejercicios

1. Se sabe que el determinante de la matriz A = $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ es – 3. Calcula, indicando las propiedades que utilices, los siguientes determinantes:

   a) det(– 2A)

   b) $\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ 7a_{11} & 7a_{12} & 7a_{13} \\ 2a_{31} & 2a_{32} & 2a_{33} \end{vmatrix}$ y $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21}+2a_{31} & 5a_{31} \\ a_{12} & a_{22}+2a_{32} & 5a_{32} \\ a_{13} & a_{23}+2a_{33} & 5a_{33} \end{vmatrix}$

2. Se sabe que el determinante de la matriz A = $\begin{pmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{pmatrix}$ es 3. Calcula los siguientes determinantes, indicando, en cada caso, las propiedades que utilices:

   a) det(A^3) y det ($A + A^t$)

   b) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ c & e & f \\ 2b & 2d & 2e \end{vmatrix}$

   c) $\begin{vmatrix} a & b & 4a-c \\ b & d & 4b-e \\ c & e & 4c-f \end{vmatrix}$

3. Sabiendo que el determinante de la matriz A = $\begin{pmatrix} x & y & z \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ es 2, calcula los siguientes determinantes indicando, en cada caso, las propiedades que utilices:

   a) det(3A) b) $\begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 3x & 2y & z \\ 3 & 4 & 3 \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ x+2 & y+4 & z+6 \\ -1 & 0 & -1 \end{vmatrix}$

4. Sabiendo que el determinante de una matriz A = $\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ p & q & r \end{pmatrix}$ es 4, calcula los siguientes determinantes, indicando, en cada caso, las propiedades que utilizas:

   a) det(– 2A)

   b) $\begin{vmatrix} a & -b & c \\ 2d & -2e & 2f \\ p & -q & r \end{vmatrix}$ **y** $\begin{vmatrix} -3d & -3e & -3f \\ a & b & c \\ -p & -q & -r \end{vmatrix}$

5. Sea M una matriz cuadrada de orden 3 tal que su determinante es det(M) = 2. Calcula:
   a) El determinante de $2M^t$ (M^t es la matriz traspuesta de M)
   b) El determinante de N, donde N es la matriz resultante de intercambiar la primera y segunda filas de M.

6. Considera las matrices A = $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ y B = $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Halla el determinante de $AB^{2013}A^t$, donde A^t es la matriz traspuesta de A.

7. Sean A y B dos matrices cuadradas de orden 3 cuyos determinantes son |A| = $\frac{1}{2}$ y |B| = – 2. Halla:

   a) $|A^3|$
   b) |– 2A|
   c) $|AB^t|$, siendo B^t la matriz traspuesta de B

8. De la matriz A = $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ se sabe que det(A) = 4. Se pide:

   a) Halla $\det(-3A^t)$ **y** $\det\begin{pmatrix} 2b & 2a \\ -3d & -3c \end{pmatrix}$**. Indica las propiedades que utilizas.**

   b) Si B es una matriz cuadrada tal que $B^3 = I$, siendo I la matriz identidad, halla det(B)

9. Sea M = $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & m+1 & 0 \\ 1 & 1 & m-1 \end{pmatrix}$. Determina los valores de m para que los vectores fila de M sean linealmente independientes.

SOLUCIONES

1. Se sabe que el determinante de la matriz A = $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ es – 3. Calcula, indicando las propiedades que utilices, los siguientes determinantes:

a) det(– 2A)

b) $\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ 7a_{11} & 7a_{12} & 7a_{13} \\ 2a_{31} & 2a_{32} & 2a_{33} \end{vmatrix}$ **y** $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21}+2a_{31} & 5a_{31} \\ a_{12} & a_{22}+2a_{32} & 5a_{32} \\ a_{13} & a_{23}+2a_{33} & 5a_{33} \end{vmatrix}$

a) Si A_n es una matriz cuadrada de orden n, sabemos que se cumple que $|k \cdot A| = k^n \cdot |A|$; en nuestro caso como A es una matriz de orden 3, tenemos que: $|-2A| = (-2)^3 \cdot |A| = (-8)\cdot(-3) = 24$

b) $\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ 7a_{11} & 7a_{12} & 7a_{13} \\ 2a_{31} & 2a_{32} & 2a_{33} \end{vmatrix} = 7\cdot 2\cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = -7\cdot 2\cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = -7\cdot 2\cdot(-3) = 42$

En el primer paso hemos aplicado la propiedad de los determinantes que dice: "Si una fila o columna de un determinante está multiplicada por un mismo número, dicho número podemos sacarlo fuera del determinante multiplicándolo". En el segundo paso hemos aplicado la propiedad que dice: "Si en un determinante cambiamos entre si dos filas o dos columnas el determinante cambia de signo".

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21}+2a_{31} & 5a_{31} \\ a_{12} & a_{22}+2a_{32} & 5a_{32} \\ a_{13} & a_{23}+2a_{33} & 5a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & 5a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & 5a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & 5a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & 2a_{31} & 5a_{31} \\ a_{12} & 2a_{32} & 5a_{32} \\ a_{13} & 2a_{33} & 5a_{33} \end{vmatrix} = 5\cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} + 2\cdot 5\cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{31} & a_{31} \\ a_{12} & a_{32} & a_{32} \\ a_{13} & a_{33} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= 5\cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} + 2\cdot 5\cdot 0 = 5\cdot(-3) = -15$$

En el primer paso hemos aplicado la propiedad de los determinantes que dice: "Si una fila o columna de un determinante es suma de dos sumandos, dicho determinante se puede descomponer en suma de dos determinantes". En el segundo paso hemos aplicado la propiedad que dice: "Si una fila o columna de un determinante está multiplicada por un mismo número, dicho número podemos sacarlo fuera del determinante multiplicándolo". En el tercer paso hemos aplicado la propiedad: "Si un determinante tiene dos filas o dos columnas iguales, el determinante vale cero".

2. Se sabe que el determinante de la matriz A = $\begin{pmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{pmatrix}$ es 3. Calcula los siguientes determinantes, indicando, en cada caso, las propiedades que utilices:

   a) det(A^3) y det ($A + A^t$)

   b) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ c & e & f \\ 2b & 2d & 2e \end{vmatrix}$

   c) $\begin{vmatrix} a & b & 4a-c \\ b & d & 4b-e \\ c & e & 4c-f \end{vmatrix}$

a) $|A^3| = |A| \cdot |A| \cdot |A| = 3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$

La matriz que nos dan es simétrica, por lo tanto, $A = A^t \Rightarrow |A + A^t| = |2A|$

Si A_n es una matriz cuadrada de orden n, sabemos que se cumple que $|k \cdot A| = k^n \cdot |A|$; en nuestro caso como A es una matriz de orden 3, tenemos que: $|2A| = (2)^3 \cdot |A| = 8 \cdot 3 = 24$

b) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ c & e & f \\ 2b & 2d & 2e \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} a & b & c \\ c & e & f \\ b & d & e \end{vmatrix} = -2 \cdot \begin{vmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{vmatrix} = -2 \cdot (3) = -6$

En el primer paso hemos aplicado la propiedad de los determinantes que dice: "Si una fila o columna de un determinante está multiplicada por un mismo número, dicho número podemos sacarlo fuera del determinante multiplicándolo". En el segundo paso hemos aplicado la propiedad que dice: "Si en un determinante cambiamos entre si dos filas o dos columnas el determinante cambia de signo".

c) $\begin{vmatrix} a & b & 4a-c \\ b & d & 4b-e \\ c & e & 4c-f \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & 4a \\ b & d & 4b \\ c & e & 4c \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{vmatrix} = 4 \cdot \begin{vmatrix} a & b & a \\ b & d & b \\ c & e & c \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{vmatrix} = 4 \cdot 0 - 3 = -3$

En el primer paso hemos aplicado la propiedad de los determinantes que dice: "Si una fila o columna de un determinante es suma de dos sumandos, dicho determinante se puede descomponer en suma de dos determinantes". En el segundo paso hemos aplicado la propiedad que dice: "Si una fila o columna de un determinante está multiplicada por un mismo número, dicho número podemos sacarlo fuera del determinante multiplicándolo". En el tercer paso hemos aplicado la propiedad: "Si un determinante tiene dos filas o dos columnas iguales, el determinante vale cero".

3. Sabiendo que el determinante de la matriz A = $\begin{pmatrix} x & y & z \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ es 2, calcula los siguientes determinantes indicando, en cada caso, las propiedades que utilices:

a) det(3A) b) $\begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 3x & 2y & z \\ 3 & 4 & 3 \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ x+2 & y+4 & z+6 \\ -1 & 0 & -1 \end{vmatrix}$

a) Si A_n es una matriz cuadrada de orden n, sabemos que se cumple que $|k \cdot A| = k^n \cdot |A|$; en nuestro caso como A es una matriz de orden 3, tenemos que: $|3A| = (3)^3 \cdot |A| = (27) \cdot (2) = 54$

b)

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 3x & 2y & z \\ 3 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ x & 2y & z \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 3 \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ x & y & z \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 3 \cdot 2 \cdot (-2) = -12$$

En el primer paso y en el segundo hemos aplicado la propiedad de los determinantes que dice: "Si una fila o columna de un determinante está multiplicada por un mismo número, dicho número podemos sacarlo fuera del determinante multiplicándolo". En el tercer paso hemos aplicado la propiedad que dice: "Si en un determinante cambiamos entre si dos filas o dos columnas el determinante cambia de signo".

c)

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ x+2 & y+4 & z+6 \\ -1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ x & y & z \\ -1 & 0 & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ -1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ x & y & z \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -2$$

En el primer paso hemos aplicado la propiedad de los determinantes que dice: "Si una fila o columna de un determinante es suma de dos sumandos, dicho determinante se puede descomponer en suma de dos determinantes". Y también la propiedad: "Si un determinante tiene dos filas o dos columnas proporcionales, el determinante vale cero".

---

4. Sabiendo que el determinante de una matriz A = $\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ p & q & r \end{pmatrix}$ es 4, calcula los siguientes determinantes, indicando, en cada caso, las propiedades que utilizas:

a) det(– 2A)

b) $\begin{vmatrix} a & -b & c \\ 2d & -2e & 2f \\ p & -q & r \end{vmatrix}$ **y** $\begin{vmatrix} -3d & -3e & -3f \\ a & b & c \\ -p & -q & -r \end{vmatrix}$

a) Si A_n es una matriz cuadrada de orden n, sabemos que se cumple que $|k\cdot A| = k^n \cdot |A|$; en nuestro caso como A es una matriz de orden 3, tenemos que: $|-2A| = (-2)^3 \cdot |A| = (-8)\cdot 4 = -32$

b) $\begin{vmatrix} a & -b & c \\ 2d & -2e & 2f \\ p & -q & r \end{vmatrix} = 2\cdot \begin{vmatrix} a & -b & c \\ d & -e & f \\ p & -q & r \end{vmatrix} = -2\cdot \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ p & q & r \end{vmatrix} = -2\cdot 4 = -8$

En el primer paso hemos aplicado la propiedad de los determinantes que dice: "Si una fila o columna de un determinante está multiplicada por un mismo número, dicho número podemos sacarlo fuera del determinante multiplicándolo".

$$\begin{vmatrix} -3d & -3e & -3f \\ a & b & c \\ -p & -q & -r \end{vmatrix} = (-3)\cdot(-1)\cdot \begin{vmatrix} d & e & f \\ a & b & c \\ p & q & r \end{vmatrix} = (-3)\cdot(-1)\cdot(-1) \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ p & q & r \end{vmatrix} = -3\cdot 4 = -12$$

En el primer paso hemos aplicado la propiedad de los determinantes que dice: "Si una fila o columna de un determinante está multiplicada por un mismo número, dicho número podemos sacarlo fuera del determinante multiplicándolo". En el segundo paso hemos aplicado la propiedad que dice: "Si en un determinante se cambian entre si dos filas o columnas, el determinante cambia de signo".

---

5. Sea M una matriz cuadrada de orden 3 tal que su determinante es det(M) = 2. Calcula:
   a) El determinante de $2M^t$ (M^t es la matriz traspuesta de M)
   b) El determinante de N, donde N es la matriz resultante de intercambiar la primera y segunda filas de M.

   a) Si A_k es una matriz cuadrada de orden n, sabemos que se cumple que $|k\cdot A| = k^n|A|$. En nuestro caso, como M es una matriz de orden 3, tenemos que:

$$|2M^t| = |2M| = (2)^3 \cdot |M| = (8)\cdot 2 = 16$$

   b) Si en un determinante cambiamos dos filas o dos columnas, el determinante cambia de signo, luego, el determinante de N vale – 2.

---

6. Considera las matrices A = $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ y B = $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Halla el determinante de $AB^{2013}A^t$, donde A^t es la matriz traspuesta de A.

$|AB^{2013}A^t| = |A|\cdot|B^{2013}|\cdot|A^t| = 2\cdot 0^{2013}\cdot 2 = 0$, ya que |B| = 0

---

7. Sean A y B dos matrices cuadradas de orden 3 cuyos determinantes son $|A| = \frac{1}{2}$ y $|B| = -2$. Halla:

a) $|A^3|$
b) $|-2A|$
c) $|AB^t|$, siendo B^t la matriz traspuesta de B

a) $|A^3| = |A\cdot A\cdot A| = |A|\cdot|A|\cdot|A| = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{8}$

b) Si A_k es una matriz cuadrada de orden n, sabemos que se cumple que $|k\cdot A| = k^n|A|$. En nuestro caso, como A es una matriz de orden 3, tenemos que:

$$|-2A| = (-2)^3\cdot|A| = (-8)\cdot\frac{1}{2} = -4$$

c)

$$|A\cdot B^t| = |A|\cdot|B^t| = |A|\cdot|B| = \frac{1}{2}\cdot(-2) = -1$$

---

8. De la matriz A = $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ se sabe que det(A) = 4. Se pide:

a) Halla $\det(-3A^t)$ y $\det\begin{pmatrix} 2b & 2a \\ -3d & -3c \end{pmatrix}$. Indica las propiedades que utilizas.

b) Si B es una matriz cuadrada tal que $B^3 = I$, siendo I la matriz identidad, halla det(B) a)

$$\det(-3A^t) = (-3)^2 \det(A^t) = 9 \cdot \det(A) = 9 \cdot 4 = 36$$

$$\det\begin{pmatrix} 2b & 2a \\ -3d & -3c \end{pmatrix} = 2 \cdot (-3) \det\begin{pmatrix} b & a \\ d & c \end{pmatrix} = -6 \cdot (-1) \det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = 6 \cdot 4 = 24$$

Si en un determinante cambiamos dos filas o dos columnas, el determinante cambia de signo.

Si en un determinante hay un número que multiplica a una fila o columna, dicho numero sale fuera multiplicando al determinante.

b)

$$\det(B^3) = \det(B \cdot B \cdot B) = \det(B) \cdot \det(B) \cdot \det(B) = [\det(B)]^3 = 1 \Rightarrow \det(B) = \sqrt[3]{1} = 1$$

---

9. Sea M = $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & m+1 & 0 \\ 1 & 1 & m-1 \end{pmatrix}$. Determina los valores de m para que los vectores fila de M sean linealmente independientes.

Calculamos el determinante de la matriz M:

$$|M| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & m+1 & 0 \\ 1 & 1 & m-1 \end{vmatrix} = m^2 + m = 0 \Rightarrow m = 0\ ;\ m = -1$$

Para todos los valores de $m \neq 0$ y -1, el determinante es distinto de cero y los vectores son linealmente independientes.