TEOREMA DE ROUCHÉ-FROBENIUS

El Teorema de Rouché-Frobenius permite **calcular el número de soluciones de un sistema de ecuaciones lineales** en función del rango de la matriz de coeficientes y del rango de la matriz ampliada asociadas al sistema.

TEOREMA: (Rouché-Frobenius)

Dado un sistema de ecuaciones lineales con m ecuaciones y n incógnitas:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots. \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \ldots a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Llamamos **matriz del sistema** a la matriz, A, formada por los coeficientes de las incógnitas

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Y **matriz ampliada**, A', a la matriz del sistema ampliada con los términos independientes

$$A' = \left(\begin{array}{ccccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

Si rango A = rango A´ = Nº Incógnitas $\Rightarrow$ Sistema Compatible Determinado
Si rango A = rango A' $\neq$ Nº Incógnitas $\Rightarrow$ Sistema Compatible Indeterminado
Si rango A $\neq$ rango A' $\Rightarrow$ Sistema Incompatible

Ejemplo 1:

Discute el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 2x - 5y + 3z = 4 \\ x - 2y + z = 3 \\ 5x + y + 7z = 11 \end{cases}$$

La matriz de los coeficientes es A = $\begin{pmatrix} 2 & -5 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 5 & 1 & 7 \end{pmatrix}$ y la matriz ampliada es

A' = $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -5 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & 1 & 3 \\ 5 & 1 & 7 & 11 \end{array}\right)$.

Para saber el rango de la matriz A, calculamos su determinante:

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -5 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 5 & 1 & 7 \end{vmatrix} = -28 + 3 - 25 - (-30 - 35 + 2) = -50 - (-63) = 13 \neq 0$$

Por lo tanto, rg(A)=3

$|A'| \neq 0 \Rightarrow$ rg(A´) = 3

De donde rg(A) = rg(A') = nº incógnitas = 3, por lo que el Sistema es Compatible Determinado.

<u>Ejemplo 2:</u>

Discute el siguiente sistema, según los valores de a:

$$\begin{cases} \mathbf{x - y + 2z = 1} \\ \mathbf{2x + y + az = 0} \\ \mathbf{x + y - z = a} \end{cases}$$

Estudiamos el rango de la matriz de los coeficientes:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & a \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow |A| = -2a - 1$$

$$|A| = 0 \rightarrow -2a - 1 = 0 \rightarrow a = \frac{-1}{2}$$

- Si $a = \frac{-1}{2} \rightarrow |A| \neq 0 \rightarrow \text{ran}(A) = \text{ran}(A') = \text{n}^{\text{o}}$ incógnitas $= 3 \Rightarrow$ El sistema es *compatible determinado*.
- Si $a = \frac{-1}{2}$, queda: $A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1/2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1/2 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & -2 & -1 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 6 & -9 & -4 \\ 0 & 4 & -6 & -3 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 6 & -9 & -4 \\ 0 & 0 & -0 & 1 \end{array}\right)$

$\Rightarrow \begin{bmatrix} \text{RangoA} = 2 \\ \text{RangoA*} = 3 \end{bmatrix} \Rightarrow$ Sistema Incompatible