TEOREMA DE ROUCHÉ FROBENIUS
Ejercicios

1. Discute, con la ayuda del Teorema de Rouché-Frobenius, el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x + 2y + z = 2 \\ -x + 3y + z = 0 \\ -x + y + z = 1 \end{cases}$$

2. Discute, con la ayuda del Teorema de Rouché-Frobenius, el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x + y + z = -1 \\ 2x - y + z = 0 \\ -2x + 7y + z = -4 \end{cases}$$

3. Discute, con ayuda del Teorema de Rouché-Frobenius, el siguiente sistema de ecuaciones, según los valores de k.

$$\begin{cases} x - y + 2z = 3 \\ kx + 5y - 4z = 1 \\ 3x + 2y - z = 1 \end{cases}$$

4. Discute, con ayuda del Teorema de Rouché-Frobenius, el siguiente sistema de ecuaciones, según los valores de m.

$$\begin{cases} 2x + y + mz = 4 \\ x \quad\quad + z = 2 \\ x + y + z = 2 \end{cases}$$

SOLUCIONES

1. Discute, con la ayuda del Teorema de Rouché-Frobenius el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x+2y+z=2 \\ -x+3y+z=0 \\ -x+y+z=1 \end{cases}$$

Solución:

Sea A = $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ la matriz de los coeficientes del sistema y

A’ = $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$ la matriz ampliada con los términos independientes.

El Teorema de Rouché-Frobenius nos dice que:

rg(A) = rg(A’) = nº incógnitas ⇒ Sistema Compatible Determinado
rg(A) = rg(A’) ≠ nº incógnitas ⇒ Sistema Compatible Indeterminado
rg(A) ≠ rg(A’) ⇒ Sistema Incompatible

Vamos a calcular rg(A) y rg(A’) para poder compararlos:

|A| = $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ = 4 ⇒ rg(A) = 3

Como |A| es un menor de orden 3 de la matriz A', también rg(A ') = 3.

Por lo tanto:

rg(A) = rg(A’) = nº incógnitas ⇒ Sistema Compatible Determinado

2. Discute, con la ayuda del Teorema de Rouché-Frobenius, el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x+y+z=-1 \\ 2x-y+z=0 \\ -2x+7y+z=-4 \end{cases}$$

Solución:

Sea A = $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -2 & 7 & 1 \end{pmatrix}$ la matriz de los coeficientes del sistema y

A' = $\left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ -2 & 7 & 1 & -4 \end{array}\right)$ la matriz ampliada con los términos independientes.

El Teorema de Rouché-Frobenius nos dice que:

rg(A) = rg(A') = nº incógnitas ⇒ Sistema Compatible Determinado
rg(A) = rg(A') ≠ nº incógnitas ⇒ Sistema Compatible Indeterminado
rg(A) ≠ rg(A') ⇒ Sistema Incompatible

Vamos a calcular rg(A) y rg(A') para poder compararlos:

|A| = $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -2 & 7 & 1 \end{vmatrix}$ = 0 ⇒ rg(A) < 3

Observamos que $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -1-4 = -5 \neq 0$, es decir, A tiene un menor de orden 2 no nulo, de manera que rg(A) = 2.

Dicho menor es también un menor de orden 2 de A', por lo cual rg(A') ≥ 2.
El menor puede orlarse de dos formas:

a) Añadiendo la última fila y la tercera columna, lo cual da lugar a |A|, que hemos visto que se anula.
b) Añadiendo la última fila y la última columna de A':

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \\ -2 & 7 & 4 \end{vmatrix} = 0$$

Como los menores orlados son ambos nulos rg(A') = 2.

Por lo tanto:

rg(A) = rg(A') = 2 < nº incógnitas = 3 ⇒ Sistema Compatible Indeterminado.

3. Discute, con ayuda del Teorema de Rouché-Frobenius, el siguiente sistema de ecuaciones, según los valores de k.

$$\begin{cases} x - y + 2z = 3 \\ kx + 5y - 4z = 1 \\ 3x + 2y - z = 1 \end{cases}$$

Solución:

Sea A = $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ k & 5 & -4 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ la matriz de los coeficientes del sistema y

A' = $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 3 \\ k & 5 & -4 & 1 \\ 3 & 2 & -1 & 1 \end{array}\right)$ la matriz ampliada con los términos independientes.

El Teorema de Rouché-Frobenius nos dice que:

rg(A) = rg(A') = nº incógnitas ⇒ Sistema Compatible Determinado
rg(A) = rg(A') ≠ nº incógnitas ⇒ Sistema Compatible Indeterminado
rg(A) ≠ rg(A') ⇒ Sistema Incompatible

Vamos a calcular rg(A) para poder compararlo después con rg(A')

|A| = $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ k & 5 & -4 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix}$ = 3k – 15. Y tenemos que 3k – 15 = 0 ⇔ $k = 5$

Como $\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 5 & -4 \end{vmatrix} \neq 0$, tenemos que:

	rg(A)
k = 5	2
k ≠ 5	3

Vamos a calcular rg(A'):

|A'| = $\begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 5 & -4 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$, por lo que rg(A') = 3

Resumiendo:

	rg(A)	rg(A')	Nº incógnitas	Tipo de sistema
k = 5	2	3	3	Incompatible
k ≠ 5	3	3	3	Compatible Determinado

4. Discute, con ayuda del Teorema de Rouché-Frobenius, el siguiente sistema de ecuaciones, según los valores de m.

$$\begin{cases} 2x + y + mz = 4 \\ x \quad\quad + z = 2 \\ x + y + z = 2 \end{cases}$$

Solución:

Sea A = $\begin{pmatrix} 2 & 1 & m \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ la matriz de los coeficientes del sistema y

A' = $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & m & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right)$ la matriz ampliada con los términos independientes.

El Teorema de Rouché-Frobenius nos dice que:

rg(A) = rg(A') = nº incógnitas ⇒ Sistema Compatible Determinado
rg(A) = rg(A') ≠ nº incógnitas ⇒ Sistema Compatible Indeterminado
rg(A) ≠ rg(A') ⇒ Sistema Incompatible

Vamos a calcular rg(A) para poder compararlo después con rg(A')

|A| = $\begin{vmatrix} 2 & 1 & m \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ = m – 2. Y tenemos que m – 2 = 0 ⇔ $m = 2$

Como $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \neq 0$, tenemos que:

	rg(A)
m = 2	2
m ≠ 2	3

Vamos a calcular rg(A'):
Como la columna formada por los términos independientes coincide con la primera columna multiplicada por 2, solo nos queda la posibilidad:

|A'| = $\begin{vmatrix} 2 & 1 & m \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = m - 2$

Resumiendo:

	rg(A)	rg(A')	Nº Incógnitas	Tipo de sistema
m = 2	2	2	3	Compatible Indeterminado
m ≠ 5	3	3	3	Compatible Determinado