DISTRIBUCIÓN BINOMIAL

Sea un experimento aleatorio en el que sólo puedan darse dos posibilidades: que ocurra un determinado suceso A, que llamaremos éxito, o que no ocurra dicho suceso, o sea que ocurra su complementario, que llamaremos fracaso, $\bar{A}$.

Se conoce la probabilidad de ocurrencia del suceso A, y por lo tanto la de su complementario:

$$P(A) = p \ \text{ y } P(\bar{A}) = 1-p = q$$

Se repite el experimento n veces en las mismas condiciones (independencia). Se define la variable aleatoria **Binomial:**

X: "nº de veces que ocurre el suceso A (nº éxitos) en n realizaciones independientes del experimento"

Por lo tanto, X = 0, 1, 2 , 3, ..., n

Se escribe: X →B(n,p)

Ejemplos:

- Nº de caras al lanzar 20 veces una moneda
- Nº de aprobados si se presentan 80 alumnos a un examen
- Nº de familias con un solo hijo en una población de 120 familias
- Nº de reacciones negativas ante un fármaco administrado a 40 pacientes
- Nº de accidentes de tráfico si han circulado 1200 automóviles
- Nº de semillas que germinan de las 20 semillas que se han plantado en suelos de idéntica composición

FUNCIÓN DE PROBABILIDAD:

$$P(X=r) = \binom{n}{r} p^r q^{n-r}$$

$$= \frac{n!}{r!(n-r)!} p^r q^{n-r}$$

$$r : 0,1,2,\ldots,n$$

EJEMPLO:

La probabilidad de que cierto antibiótico presente una reacción negativa al administrarse a un ave rapaz en recuperación es de 0.15. Si se les ha administrado dicho antibiótico a 10 aves, calcúlense las probabilidades de que haya reacción negativa:

a. En dos aves
b. En ningún ave
c. En menos de 4 aves
d. En más de 3 aves
e. Entre 2 y 5 aves

Solución:

Suceso A : "*A un ave se le presenta reacción negativa*"

X :"*nº de aves a las que se les presenta tal reacción*"

$P(A) = 0.15$; $n = 10$; $X \rightarrow B(10\ ;\ 0.15)$

a. $P(X = 2) = 0.2759$

b. $P(X = 0) = 0.1969$

c. $$P(X < 4) = P(X \leq 3) = P(X = 0) + P(X = 1) + \\ + P(X = 2) + P(X = 3) = 0.1969 + 0.3474 + \\ + 0.2759 + 0.1298 = 0.95$$

d. $$P(X > 3) = 1 - P(X \leq 3) = 1 - \big(P(X = 0) + P(X = 1) + \\ + P(X = 2) + P(X = 3)\big) = 1 - \big(0.1969 + 0.3474 + 0.2759 + \\ + 0.1298\big) = 0.05$$

e. $$P(2 \leq X \leq 5) = P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 4) + \\ + P(X = 5) = 0.2759 + 0.1298 + 0.0401 + 0.0085 = \\ = 0.4543$$

Ejercicios:

1) Hallar la probabilidad de que al lanzar una moneda 5 veces se obtengan 3 caras.

2) Hallar la probabilidad de que al lanzar una moneda 5 veces se obtengan como máximo 2 caras.

3) Se lanza un dado al aire 5 veces. Halla la probabilidad de:
a) Obtener dos veces un 5.
b) Obtener más de dos veces un 5.

4) La última novela de cierto afamado autor ha tenido un importante éxito, hasta el punto de que el 80 % de los lectores ya la han leído. Un grupo de cuatro amigos son aficionados a la lectura :
a) Describir la variable que indica el número de individuos del grupo que han leído dicha novela.
b) ¿Cuál es la probabilidad de que en el grupo hayan leído la obra dos personas? ¿Y al menos dos?

5) El 30 % de los tornillos de una gran partida son defectuosos. Si se cogen tres tornillos al azar, calcula :
a) La probabilidad de que los tres sean defectuosos.
b) La probabilidad de que solamente dos sean defectuosos.
c) La probabilidad de que ninguno de ellos sea defectuoso.

6) Un tratamiento contra el cáncer produce mejoría en el 80 % de los enfermos a los que se le aplica. Se suministra a 5 enfermos. Se pide :
a) Calcula la probabilidad de que los 5 pacientes mejoren.
b) Calcula la probabilidad de que, al menos, tres no experimenten mejoría.
c) ¿Cuántos pacientes se espera que mejoren?

7) Se reparten unas invitaciones sabiendo que el 40 % de los invitados asistirán al acto. Se seleccionan al azar 10 invitados. Calcula :
a) La probabilidad de que solo tres acudan al acto.
b) La probabilidad de que acudan más de tres.

8) Una familia tiene 10 hijos. La distribución por sexos es igualmente probable. Hallar la probabilidad de que haya :
a) Como mucho tres niñas.
b) Al menos una niña.
c) Al menos ocho niños.
d) Al menos una niña y un niño.

9) Una encuesta revela que el 20 % de de la población es favorable a un determinado político. Elegidas seis personas al azar, se desea saber :
a) Probabilidad de que las seis personas sean favorableas al político.
b) Probabilidad de que las seis personas le sean desfavorables.
c) Probabilidad de que menos de tres personas le sean favorables.

10) Una prueba de inteligencia está compuesta de 10 preguntas, cada una de las cuales tiene cuatro respuestas, siendo solo una de ellas correcta. Un alumno tiene prisa por acabar la prueba y decide contestar de forma aleatoria. Se pide :
a) Probabilidad de no acertar ninguna pregunta.
b) Probabilidad de acertar exactamente cuatro preguntas.
c) Probabilidad de acertar todas las preguntas.
d) Probabilidad de acertar al menos siete preguntas.
e) Probabilidad de acertar menos de cuatro preguntas.

Soluciones:

1) Hallar la probabilidad de que al lanzar una moneda 5 veces se obtengan 3 caras.

Se trata de una distribución binomial puesto que la variable
es discreta, sólo tenemos dos sucesos: salir cara o salir cruz.
La probabilidad de "salir cara" es :

$$p = \frac{1}{2}$$

Luego la probabilidad de salir cruz será:

$$q = 1 - p = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$n = 5$$

$$P(X = 3) = \binom{5}{3} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{3} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{5-3} = \frac{5 \cdot 4 \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{1}}{2 \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{1}} \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{4} = \frac{10}{32} = \frac{5}{16}$$

2) Hallar la probabilidad de que al lanzar una moneda 5 veces se obtengan como máximo 2 caras.

Las condiciones del enunciado se cumplen cuando sale cero,
una o dos caras, luego:

$$P(X \le 2) = \sum_{r=0}^{x} \binom{5}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{r} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{5-r} =$$

$$= \binom{5}{0} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{0} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{5-0} + \binom{5}{1} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{1} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{5-1} + \binom{5}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{5-2} =$$

$$= 1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{32} + \frac{5 \cdot \cancel{4} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{1}}{\cancel{4} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{1}} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{16} + \frac{5 \cdot 4 \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{1}}{2 \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{1}} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{8} =$$

$$= \frac{1}{32} + \frac{5}{32} + \frac{10}{32} = \frac{16}{32}$$

3) Se lanza un dado al aire 5 veces. Halla la probabilidad de:

a) Obtener dos veces un 5.

b) Obtener más de dos veces un 5.

a) Se trata de una distribución binomial puesto que la variable es discreta, sólo pueden darse los sucesos mutuamente excluyentes "salir 5" o "no salir 5".

La probabilidad de "salir 5 en una tirada" es :

$$p = \frac{1}{6}$$

Luego la probabilidad de salir cruz será:

$$q = 1 - p = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$$

$$n = 5$$

$$P(X = 2) = \binom{5}{2} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{5-2} = \frac{5 \cdot 4 \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{1}}{2 \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{1}} \cdot \frac{1}{36} \cdot \frac{125}{216} = \frac{2500}{15552} = \frac{625}{3888}$$

b) $P(X \geq 2) = P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 4)$

$$P(X \geq 2) = \sum_{r=0}^{x} \binom{5}{2} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^r \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{5-r} =$$

$$= \binom{5}{0} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^0 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{5-0} + \binom{5}{1} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^1 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{5-1} + \binom{5}{2} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{5-2} + \binom{5}{3} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^3 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{5-3} =$$

$$= 1 \cdot 1 \cdot \frac{3125}{7776} + \frac{5 \cdot \cancel{4} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{1}}{\cancel{4} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{1}} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{625}{1296} + \frac{5 \cdot 4 \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{1}}{2 \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{1}} \cdot \frac{1}{36} \cdot \frac{125}{216} + \frac{5 \cdot 4 \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{1}}{\cancel{3} \cdot 2 \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{1}} \cdot \frac{1}{216} \cdot \frac{25}{36} =$$

$$= \frac{3125}{7776} + \frac{3125}{7776} + \frac{625}{3888} + \frac{125}{3888} = \frac{3875}{3888}$$

4) La última novela de cierto afamado autor ha tenido un importante éxito, hasta el punto de que el 80 % de los lectores ya la han leído. Un grupo de cuatro amigos son aficionados a la lectura :

a) Describir la variable que indica el número de individuos del grupo que han leído dicha novela.

b) ¿Cuál es la probabilidad de que en el grupo hayan leído la obra dos personas? ¿Y al menos dos?

a)

Hallamos en primer lugar la probabilidad de que de los cuatro amigos hayan leído la novela 0, 1, 2, 3 o los 4 amigos.

Tenemos una distribución binomial en la que $n = 4$, $p = 0{,}8$ y $q = 0{,}2$.

$$P(0) = \binom{4}{0} \cdot 0{,}8^0 \cdot 0{,}2^4 = 1 \cdot 1 \cdot 0{,}0016 = 0{,}0016$$

$$P(1) = \binom{4}{1} \cdot 0{,}8^1 \cdot 0{,}2^3 = 4 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}008 = 0{,}0256$$

$$P(2) = \binom{4}{2} \cdot 0{,}8^2 \cdot 0{,}2^2 = 6 \cdot 0{,}64 \cdot 0{,}04 = 0{,}1536$$

$$P(3) = \binom{4}{3} \cdot 0{,}8^3 \cdot 0{,}2^1 = 4 \cdot 0{,}512 \cdot 0{,}2 = 0{,}4096$$

$$P(4) = \binom{4}{4} \cdot 0{,}8^4 \cdot 0{,}2^0 = 1 \cdot 0{,}4096 \cdot 1 = 0{,}4096$$

A partir de estos resultados podemos escribir la función de probabilidad :

0	1	2	3	4
0,0016	0,0256	0,1536	0,4096	0,4096

b)

$$P(2) = 0{,}1536$$

$$P(X \geq 2) = 0{,}1536 + 0{,}4096 + 0{,}4096 = 0{,}9728$$

5) El 30 % de los tornillos de una gran partida son defectuosos. Si se cogen tres tornillos al azar, calcula :

a) La probabilidad de que los tres sean defectuosos.

b) La probabilidad de que solamente dos sean defectuosos.

c) La probabilidad de que ninguno de ellos sea defectuoso.

Sea X la variable que representa el número de tornillos. Tenemos una distribución binomial, con $n = 3$ y $p = 0{,}3$: $B(3\,;\,0{,}3)$.

$$P(X = x) = \binom{n}{x} \cdot p^x \cdot q^{n-x}$$

a)

$$P(x = 3) = \binom{3}{3} \cdot 0{,}3^3 \cdot 0{,}7^0 = 1 \cdot 0{,}027 = 0{,}027$$

b)

$$P(x = 2) = \binom{3}{2} \cdot 0{,}3^2 \cdot 0{,}7^1 = 3 \cdot 0{,}09 \cdot 0{,}07 = 0{,}189$$

c)

$$P(x = 0) = \binom{3}{0} \cdot 0{,}3^0 \cdot 0{,}7^3 = 1 \cdot 0{,}343 = 0{,}343$$

6) Un tratamiento contra el cáncer produce mejoría en el 80 % de los enfermos a los que se le aplica. Se suministra a 5 enfermos. Se pide :

a) Calcula la probabilidad de que los 5 pacientes mejoren.

b) Calcula la probabilidad de que, al menos, tres no experimenten mejoría.

c) ¿Cuántos pacientes se espera que mejoren?

Sean :
X = "número de enfermos que experimentan mejoría"
n = "número de pacientes a los que se les suministra el tratamiento"
p = "probabilidad de mejoría"
Si p = 0,8 ⇒ q = 1 - p = 1 - 0,8 = 0,2

$$P(X = x) = \binom{n}{x} \cdot p^x \cdot q^{n-x}$$

a)

$$P(x = 5) = \binom{5}{5} \cdot 0{,}8^5 \cdot 0{,}2^0 = 1 \cdot 0{,}3277 = 0{,}3277$$

b)

$$P(x < 3) = P(x = 1) + P(x = 2) + P(x = 0) = \binom{5}{1} \cdot 0{,}8^1 \cdot 0{,}2^4 + \binom{5}{2} \cdot 0{,}8^2 \cdot 0{,}2^3 + \binom{5}{0} \cdot 0{,}8^0 \cdot 0{,}2^5 =$$

$$= 5 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}0016 + 10 \cdot 0{,}64 \cdot 0{,}008 + 1 \cdot 1 \cdot 0{,}00032 = 0{,}0064 + 0{,}0512 + 0{,}00032 = 0{,}05792$$

c)

$$E(x) = \mu = n \cdot p = 5 \cdot 0{,}8 = 4 \text{ pacientes.}$$

7) Se reparten unas invitaciones sabiendo que el 40 % de los invitados asistirán al acto. Se seleccionan al azar 10 invitados. Calcula :

a) La probabilidad de que solo tres acudan al acto.

b) La probabilidad de que acudan más de tres.

Sea X la variable que exprese el número de personas que asisten al acto. Se trata de una distribución binomial de parámetros n = 10 y p = 0,4 : B (10 ; 0,4).

$$P(X = x) = \binom{n}{x} \cdot p^x \cdot q^{n-x}$$

a)

$$P(x = 3) = \binom{10}{3} \cdot 0{,}4^3 \cdot 0{,}6^7 = 120 \cdot 0{,}064 \cdot 0{,}028 = 0{,}215$$

b)

$$P(x > 3) = 1 - P(x \leq 3) = 1 - P(x = 0) - P(x = 1) - P(x = 2) - P(x = 3) = 1 - \binom{10}{0} \cdot 0{,}4^0 \cdot 0{,}6^{10} +$$

$$+ \binom{10}{1} \cdot 0{,}4^1 \cdot 0{,}6^9 + \binom{10}{2} \cdot 0{,}4^2 \cdot 0{,}6^8 + \binom{10}{3} \cdot 0{,}4^3 \cdot 0{,}6^7 = 1 - 0{,}006 - 0{,}040 - 0{,}121 - 0{,}215 = 0{,}618$$

8) Una familia tiene 10 hijos. La distribución por sexos es igualmente probable. Hallar la probabilidad de que haya :

a) Como mucho tres niñas.

b) Al menos una niña.

c) Al menos ocho niños.

d) Al menos una niña y un niño.

Tenemos una distribución binomial en la que p = 1 = 0,5 puesto que la probabilidad de que haya una niña o un niño es igual. Lla variable X hará mención a las niñas y la variable Y a los niños.

a)

$$P(x \le 3) = P(x=0)+P(x=1)+P(x=2)+P(x=3) = \binom{10}{0} \cdot 0{,}5^0 \cdot 0{,}5^{10} + \binom{10}{1} \cdot 0{,}5^1 \cdot 0{,}5^9 +$$

$$+\binom{10}{2} \cdot 0{,}5^2 \cdot 0{,}5^8 + \binom{10}{3} \cdot 0{,}5^3 \cdot 0{,}5^7 = 0{,}0009+0{,}0098+0{,}0439+0{,}1171 = 0{,}1719$$

b)

$$P(x \ge 1) = 1-P(x=0) = 1-\binom{10}{0} \cdot 0{,}5^0 \cdot 0{,}5^{10} = 1-0{,}0009 = 0{,}9991$$

c)

$$P(y \ge 8) = P(x=0)+P(x=1)+P(x=2) = 0{,}0009+0{,}0098+0{,}0439 = 0{,}0547$$

d)

El suceso contrario a este caso sería "todos son chicas" ó "no hay ninguna chica", luego tenemos :

$$P(x \ge 1) \cap P(y \ge 1) = 1-P(x=10)-P(x=0) = 1-\binom{10}{10} \cdot 0{,}5^{10} \cdot 0{,}5^0 - 0{,}0009 = 0{,}9980$$

9) Una encuesta revela que el 20 % de de la población es favorable a un determinado político. Elegidas seis personas al azar, se desea saber :

a) Probabilidad de que las seis personas sean favorableas al político.

b) Probabilidad de que las seis personas le sean desfavorables.

c) Probabilidad de que menos de tres personas le sean favorables.

Tenemos de nuevo una distribución binomial, donde p = 0,2 y q = 1 - p = 1 - 0,2 = 0,8 : B (6 ; 0,2).

$$P(X=x) = \binom{n}{x} \cdot p^x \cdot q^{n-x}$$

a)

$$P(x=6) = \binom{6}{6} \cdot 0{,}2^6 \cdot 0{,}8^0 = 1 \cdot 0{,}2^6 = 0{,}000064$$

b)

$$P(x=0) = \binom{6}{0} \cdot 0{,}2^0 \cdot 0{,}8^6 = 1 \cdot 0{,}8^6 = 0{,}2621$$

c)

$$P(x<3) = P(x=0)+P(x=1)+P(x=2) = \binom{6}{0} \cdot 0{,}2^0 \cdot 0{,}8^6 + \binom{6}{1} \cdot 0{,}2^1 \cdot 0{,}8^5 + \binom{6}{2} \cdot 0{,}2^2 \cdot 0{,}8^4 =$$

$$= 0{,}2621+6 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}8^5 + 15 \cdot 0{,}2^2 \cdot 0{,}8^4 = 0{,}2621+0{,}3932+0{,}2457 = 0{,}9011$$

10) Una prueba de inteligencia está compuesta de 10 preguntas, cada una de las cuales tiene cuatro respuestas, siendo solo una de ellas correcta. Un alumno tiene prisa por acabar la prueba y decide contestar de forma aleatoria. Se pide :

a) Probabilidad de no acertar ninguna pregunta.

b) Probabilidad de acertar exactamente cuatro preguntas.

c) Probabilidad de acertar todas las preguntas.

d) Probabilidad de acertar al menos siete preguntas.

e) Probabilidad de acertar menos de cuatro preguntas.

Sea X la variable dscreta que expresa el número de preguntas acertadas en el test de inteligencia. Tenemos una distribución binomial de parámetros n = 10 y p = 0,25. Es decir, B (10 ; 0,25).

$$P(X = x) = \binom{n}{x} \cdot p^x \cdot q^{n-x}$$

a)

$$P(x = 0) = \binom{10}{0} \cdot 0{,}25^0 \cdot 0{,}75^{10} = 1 \cdot 0{,}75^{10} = 0{,}0563$$

b)

$$P(x = 4) = \binom{10}{4} \cdot 0{,}25^4 \cdot 0{,}75^6 = 210 \cdot 0{,}25^4 \cdot 0{,}75^6 = 0{,}1459$$

c)

$$P(x = 10) = \binom{10}{10} \cdot 0{,}25^{10} \cdot 0{,}75^0 = 1 \cdot 0{,}25^{10} = 9{,}5367 \cdot 10^{-7}$$

d)

$$P(x \geq 7) = P(x = 7) + P(x = 8) + P(x = 9) + P(x = 10) = \binom{10}{7} \cdot 0{,}25^7 \cdot 0{,}75^3 + \binom{10}{8} \cdot 0{,}25^8 \cdot 0{,}75^2 +$$

$$+ \binom{10}{9} \cdot 0{,}25^9 \cdot 0{,}75^1 + 9{,}5367 \cdot 10^{-7} = 0{,}0031 + 0{,}0004 + 2{,}861 \cdot 10^{-5} + 9{,}5367 \cdot 10^{-7} =$$

$$= 0{,}0035$$

e)

$$P(x < 4) = P(x = 0) + P(x = 1) + P(x = 2) + P(x = 3) = 0{,}0563 + \binom{10}{1} \cdot 0{,}25^1 \cdot 0{,}75^9 + \binom{10}{2} \cdot 0{,}25^2 \cdot 0{,}75^8 +$$

$$+ \binom{10}{3} \cdot 0{,}25^3 \cdot 0{,}75^7 = 0{,}0563 + 0{,}1877 + 0{,}2816 + 0{,}2503 = 0{,}7759$$