OPERAR CON NÚMEROS REALES

OPERAR CON NÚMEROS NATURALES

Con los números naturales podemos realizar distintas operaciones:

Suma	Resta	Multiplicación
$2 + 5 = 7$	$5 - 3 = 2$	$3 \cdot 7 = 21$
División	**Potencias**	**Raíces**
$24 : 6 = 4$	$2^3 = 8$	$\sqrt{25}=5$

OPERAR CON NÚMEROS ENTEROS

Con los números enteros podemos realizar distintas operaciones:

Suma	Resta	Multiplicación
$-2 + 5 = 3$	$-5 - 3 = -8$	$3 \cdot (-7) = -21$
División	**Potencias**	**Raíces**
$24 : (-6) = -4$	$(-2)^3 = -8$	$\sqrt[3]{-8} = -2$

OPERAR CON NÚMEROS RACIONALES

Con los números racionales podemos realizar distintas operaciones:

Suma	Resta	Multiplicación
$\frac{1}{2} + \frac{3}{7} = \frac{7}{14} + \frac{6}{14} = \frac{13}{14}$	$\frac{1}{2} - \frac{3}{7} = \frac{7}{14} - \frac{6}{14} = \frac{1}{14}$	$\frac{3}{4} \cdot \frac{3}{5} = \frac{3 \cdot 3}{4 \cdot 5} = \frac{9}{20}$
División	**Potencias**	**Raíces**
$\frac{1}{4} : \frac{2}{5} = \frac{1 \cdot 5}{4 \cdot 2} = \frac{5}{20}$	$\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$	$\sqrt{\frac{100}{49}} = \frac{10}{7}$

OPERAR CON NÚMEROS IRRACIONALES

Con los números irracionales podemos hacer las mismas operaciones que con los otros conjuntos numéricos. Nos vamos a centrar en las operaciones con radicales, repasando todas las operaciones que se pueden hacer con ellos, desde el principio:

SIMPLIFICAR RADICALES

Hay diferentes casos, que vemos mediante ejemplos:

Ejemplo 1: (Extraer factores)

Simplifica $\sqrt{80}$

$$\sqrt{80} = \sqrt{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5}$$
$$= \sqrt{2^2} \cdot \sqrt{2^2} \cdot \sqrt{5}$$
$$= 2 \cdot 2 \cdot \sqrt{5} \text{ or } 4\sqrt{5}$$

Ejemplo 2: (Extraer factores)
Simplifica $\sqrt[3]{243}$

$$\sqrt[3]{243} = \sqrt[3]{3^5} = \sqrt[3]{3^3 \cdot 3^2} =$$

$$= \sqrt[3]{3^3} \cdot \sqrt[3]{3^2} = 3\sqrt[3]{3^2} = 3\sqrt[3]{9}$$

Ejemplo 3: (Extraer factores)
Simplifica $\sqrt[4]{2^7 \cdot 3^{14} \cdot 5^4} = 2 \cdot 3^3 \cdot 5\sqrt[4]{2^3 \cdot 3^2}$

Ejemplo 4: (Simplificar índices y exponentes)
Si existe un número natural que divida al índice y al exponente (o los exponentes) del radicando, se obtiene un radical simplificado.

a) $\sqrt[4]{36} = \sqrt[4]{2^2 \cdot 3^2} = \sqrt[2]{2 \cdot 3} = \sqrt{6}$

b) $\sqrt[5]{1024} = \sqrt[5]{2^{10}} = 2^2 = 4$

SUMAR Y RESTAR RADICALES

Solamente pueden sumarse (o restarse) radicales que sean semejantes (es decir, que tengan el mismo índice y el mismo radicando).

Ejemplo:

a) $2\sqrt{2} - 4\sqrt{2} + \sqrt{2} = (2 - 4 + 1)\sqrt{2} = -\sqrt{2}$

b) $3\sqrt[4]{5} - 2\sqrt[4]{5} - \sqrt[4]{5} = (3 - 2 - 1)\sqrt[4]{5} = 0$

c) $\sqrt{12} - 3\sqrt{3} + 2\sqrt{75} = \sqrt{2^2 \cdot 3} - 3\sqrt{3} + 2\sqrt{5^2 \cdot 3} = 2\sqrt{3} - 3\sqrt{3} + 10\sqrt{3} = 9\sqrt{3}$

d) $\sqrt[4]{4} + \sqrt[6]{8} - \sqrt[12]{64} = \sqrt[4]{2^2} + \sqrt[6]{2^3} - \sqrt[12]{2^6} = \sqrt{2} + \sqrt{2} - \sqrt{2} = \sqrt{2}$

A veces habrá mezcla de varios radicales semejantes:

Ejemplo:

$$3\sqrt{6}+3\sqrt{2}-\sqrt{50}+\sqrt{24} = \mathbf{5\sqrt{6}-2\sqrt{2}}$$

MULTIPLICACIÓN DE RADICALES

Multiplicación de radicales con el mismo índice

Para multiplicar radicales con el mismo índice se multiplican los radicandos y se deja el mismo índice.

Ejemplo:

a) $\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}=\sqrt{2\cdot 3}=\sqrt{6}$

b) $\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[3]{5}=\sqrt[3]{2\cdot 5}=\sqrt[3]{10}$

A veces el resultado podrá simplificarse:

Ejemplo:

$$\sqrt{2}\cdot\sqrt{6}=\sqrt{12}=\sqrt{2^2\cdot 3}=2\sqrt{3}$$

Multiplicación de radicales con distinto índice

Primero se reducen a índice común y luego se multiplican**.**

Ejemplo:

$$\sqrt{3}\cdot\sqrt[3]{9}\cdot\sqrt[4]{27}=$$

$$m.c.m.(2,3,4)=12$$

$$\sqrt[12]{3^6}\cdot\sqrt[12]{\left(3^2\right)^4}\cdot\sqrt[12]{\left(3^3\right)^3}=\sqrt[12]{3^6\cdot 3^8\cdot 3^9}=\sqrt[12]{3^{23}}=3\,\sqrt[12]{3^{11}}$$

DIVISIÓN DE RADICALES

División de radicales con el mismo índice

Para dividir radicales con el mismo índice se dividen los radicandos y se deja el mismo índice.

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$$

Ejemplo:

$$\frac{\sqrt[6]{128}}{\sqrt[6]{16}} = \sqrt[6]{\frac{128}{16}} = \sqrt[6]{\frac{2^7}{2^4}} = \sqrt[6]{2^3} = \sqrt{2}$$

División de radicales con distinto índice

Primero se reducen a índice común y luego se dividen.

Ejemplo:

$$\frac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt{2}} = \sqrt[6]{\frac{4^2}{2^3}} = \sqrt[6]{\frac{\left(2^2\right)^2}{2^3}} = \sqrt[6]{\frac{2^4}{2^3}} = \sqrt[6]{2}$$

Cuando terminemos de realizar una operación simplificaremos el radical, si es posible.

POTENCIAS DE RADICALES

Para elevar un radical a una potencia, se eleva a dicha potencia el radicando y se deja el mismo índice**.**

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$$

Ejemplo:

$$\left(\sqrt[3]{x}\right)^8 = \sqrt[3]{x^8} = \sqrt[3]{x^3 \cdot x^3 \cdot x^2} = x^2 \cdot \sqrt[3]{x^2}$$

RAÍZ DE UN RADICAL

La raíz de un radical es otro radical de igual radicando y cuyo índice es el producto de los dos índices.

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n \cdot m]{a}$$

Ejemplo:

$$\sqrt{\sqrt[3]{\sqrt[4]{2}}} = \sqrt[24]{2}$$

RACIONALIZAR

Racionalizar radicales consiste en quitar los radicales del denominador, lo que permite facilitar el cálculo de operaciones como la suma de fracciones.

Podemos distinguir tres casos.

<u>CASO 1</u>: Racionalización del tipo $\dfrac{a}{b\sqrt{c}}$

Se multiplica el numerador y el denominador por $\sqrt{c}$.

$$\frac{a}{b\sqrt{c}} = \frac{a \cdot \sqrt{c}}{b\sqrt{c} \cdot \sqrt{c}} = \frac{a \cdot \sqrt{c}}{b\left(\sqrt{c}\right)^2} = \frac{a \cdot \sqrt{c}}{b \cdot c}$$

Ejemplo:

$$\frac{2}{3\sqrt{2}} = \frac{2 \cdot \sqrt{2}}{3\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{2 \cdot \sqrt{2}}{3\left(\sqrt{2}\right)^2} = \frac{2 \cdot \sqrt{2}}{3 \cdot 2} = \frac{\sqrt{2}}{3}$$

<u>CASO 2:</u> Racionalización del tipo $\dfrac{a}{b\sqrt[n]{c^m}}$

Se multiplica numerador y denominador por $\sqrt[n]{c^{n-m}}$.

$$\frac{a}{b\sqrt[n]{c^m}}=\frac{a\cdot\sqrt[n]{c^{n-m}}}{b\sqrt[n]{c^m}\cdot\sqrt[n]{c^{n-m}}}=\frac{a\cdot\sqrt[n]{c^{n-m}}}{b\sqrt[n]{c^m\cdot c^{n-m}}}=\frac{a\cdot\sqrt[n]{c^{n-m}}}{b\sqrt[n]{c^n}}=\frac{a\cdot\sqrt[n]{c^{n-m}}}{b\cdot c}$$

Ejemplo:

$$\frac{2}{3\sqrt[5]{4}}=\frac{2}{3\sqrt[5]{2^2}}=\frac{2\cdot\sqrt[5]{2^3}}{3\sqrt[5]{2^2}\cdot\sqrt[5]{2^3}}=\frac{2\sqrt[5]{8}}{3\sqrt[5]{2^5}}=\frac{2\sqrt[5]{8}}{3\cdot 2}=\frac{\sqrt[5]{8}}{3}$$

<u>CASO 3:</u> Racionalización del tipo $\dfrac{a}{\sqrt{b}+\sqrt{c}}$, y en general cuando el denominador sea un binomio con al menos un radical.

Se multiplica el numerador y denominador por el conjugado del denominador**.**

Ejemplo:

$$\frac{2}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}=\frac{2\cdot\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)}{\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)\cdot\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)}=\frac{2\sqrt{2}+2\sqrt{3}}{\left(\sqrt{2}\right)^2-\left(\sqrt{3}\right)^2}=$$

$$=\frac{2\sqrt{2}+2\sqrt{3}}{2-3}=\frac{2\sqrt{2}+2\sqrt{3}}{-1}=-2\sqrt{2}-2\sqrt{3}$$

Ejercicios:

1. Simplifica los siguientes radicales:

   $a)\ \sqrt[4]{3^2} =$ $\quad b)\ \sqrt[12]{b^8 y^4} =$ $\quad c)\ \sqrt[5]{81x^9 y^2} =$ $\quad d)\ \sqrt[4]{625a^6 c^8} =$

   e) $\sqrt{\frac{32}{t^4}}$ $\quad$ f) $\sqrt{\frac{27}{m^5}}$ $\quad$ g) $\frac{\sqrt{68ac^3}}{\sqrt{27a^2}}$

2. La velocidad del sonido, V, en metros por segundo, en la superficie terrestre viene dada por la siguiente fórmula:

   $V = 20\sqrt{t + 273}$, donde t es la temperatura en grados Celsius.

   a) ¿Cuál es la velocidad del sonido cuando estamos a 15º C?
   b) ¿Cuál es la velocidad del sonido cuando estamos a 2º C?

3. Calcula las siguientes sumas y restas de radicales:

   1. $2\sqrt{5} + 4\sqrt{5}$ $\quad$ **2.** $\sqrt{6} - 4\sqrt{6}$

   3. $\sqrt{8} - \sqrt{2}$ $\quad$ **4.** $3\sqrt{75} + 2\sqrt{5}$

   5. $\sqrt{20} + 2\sqrt{5} - 3\sqrt{5}$ $\quad$ **6.** $2\sqrt{3} + \sqrt{6} - 5\sqrt{3}$

   7. $\sqrt{12} + 2\sqrt{3} - 5\sqrt{3}$ $\quad$ **8.** $3\sqrt{6} + 3\sqrt{2} - \sqrt{50} + \sqrt{24}$

   9. $\sqrt{8a} - \sqrt{2a} + 5\sqrt{2a}$ $\quad$ **10.** $\sqrt{54} + \sqrt{24}$

   11. $4\sqrt[3]{54} + 3\sqrt[3]{27} =$

4. Calcula los siguientes productos:

   1. $2\left(\sqrt{3} + 4\sqrt{5}\right)$ $\quad$ **2.** $\sqrt{6}\left(\sqrt{3} - 2\sqrt{6}\right)$

   3. $\sqrt{5}\left(\sqrt{5} - \sqrt{2}\right)$ $\quad$ **4.** $\sqrt{2}\left(3\sqrt{7} + 2\sqrt{5}\right)$

5. Un rectángulo mide $5\sqrt{7} + 2\sqrt{3}$ metros de largo y $6\sqrt{7} - 3\sqrt{3}$ metros de ancho.
   a) Calcula el perímetro de dicho rectángulo.
   b) Calcula el área de dicho rectángulo.

6. Calcula los siguientes productos con radicales:

$a)\quad \sqrt{3x}\cdot\sqrt[4]{3x}=$

$b)\quad \sqrt{a^3b}\cdot\sqrt[4]{ab^2}\cdot\sqrt[3]{a^2b^2}=$

$c)\quad hx\sqrt[3]{x^2}\cdot x^2\sqrt{x}=$

$d)\quad \sqrt[8]{2}\cdot\sqrt[4]{4}\cdot\sqrt{8}=$

$e)\quad \sqrt[4]{3x^2y^3}\cdot\sqrt{3xy}=$

7. Calcula el resultado de las siguientes operaciones:

a) $\dfrac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{10}}{\sqrt{5}}$ c) $\sqrt{\dfrac{5}{3}}\cdot\sqrt{\dfrac{27}{5}}$ e) $\sqrt[4]{3^3}\cdot\sqrt[4]{3^{17}}$

b) $\sqrt[3]{16}:\sqrt[3]{2}$ d) $\sqrt[5]{2}\cdot\sqrt[5]{2^4}$ f) $\sqrt[3]{\dfrac{1}{4}}:\sqrt[3]{2000}$

8. Calcula el resultado de las siguientes operaciones:

$a)\quad \sqrt[3]{16}:\sqrt{2}=$

$b)\quad \sqrt[4]{a^3b^5}:\sqrt{ab}=$

$c)\quad \sqrt[3]{x^2}:\sqrt[4]{x^3}=$

d) $4\sqrt[3]{4}:3\sqrt{3}=$

9. Simplifica la siguiente expresión:

$$\frac{\sqrt{a}\cdot\sqrt[3]{a^2}\cdot\sqrt[4]{a^3}}{\sqrt[6]{a^4}}=$$

10. Calcula el resultado de las siguientes operaciones:

a) $(\sqrt[4]{2^7})^3$ b) $(\sqrt{3\,.\,2^3})^7$ c) $(\sqrt[3]{2^2})^2$

11. Calcula el resultado de las siguientes operaciones:

a) $\left(\dfrac{\sqrt[3]{12}\cdot\sqrt[4]{18}}{\sqrt{6}}\right)^4=$ b) $\left(\sqrt{7}-\sqrt{2}\right)^2=$

12. Calcula el resultado de las siguientes operaciones:

a) $\sqrt{\sqrt[3]{2^{18}}}$ b) $\sqrt[3]{\sqrt[4]{5}}$ c) $\left(\sqrt[3]{\sqrt[3]{27}}\right)^2$

13. Racionaliza:

1) $\dfrac{5}{\sqrt{3}}$

2) $\dfrac{5}{3\sqrt{2}}$

3) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}$

4) $\dfrac{\sqrt{7}}{\sqrt[6]{3}}$

5) $\dfrac{2}{6+\sqrt{3}}$

6) $\dfrac{\sqrt{5}}{3+\sqrt{7}}$